BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2013***

УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ С ОБОБЩЁННЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ

К.К.ГАСАНОВ, Х.Т.ГУСЕЙНОВА
Бакинский Государственный Университет
hxanim@inbox.ru.

В данной работе рассматривается задача оптимального управления для линейной системы с обобщёнными управлениями и интегральными квадратичными критериями качества. Сначала при каждом допустимом управлении доказано существование и единственность слабого решения задачи Коши. Кроме того, для задачи минимизации доказана теорема о существовании и единственности оптимального управления. Получено необходимое и достаточное условие оптимальности управления.

Ключевые слова: оптимальное управление, обобщённая функция, слабое решение, ограниченная вариация, функционал.

При решении прикладных задач оптимального управления построенная минимизирующая последовательность управления иногда не сходится в рассматриваемом классе, сходится к некоторой обобщённой функции. Поэтому требуется расширить класс управлений, для которых в этом классе существовало бы оптимальное управление. Кроме того, часто в самой постановке задачи оптимального управления естественно использовать обобщённые функции [2-11].

1. Постановка задачи. Пусть управляемый процесс описывается n-мерной вектор-функцией $x(t)$, которая на интервале (t_0,t_1) удовлетворяет импульсной системе

$$Dx = A(t)x + B(t)u(t) + C(t)Du(t) \tag{1}$$

и начальному условию

$$x(t_0-) = x^0, \tag{2}$$

где $A(t)-(n\times n)$ - матрица, $B(t)$ и $C(t)-(n\times r)$ - матрицы, $u(t)-r$ - мерная функция ограниченной вариации на $[t_0,t_1]$ и $Du(t)$ - распределение нулевого порядка, т.е. является обобщённой производной от функции $u(t)$.

Обозначим через $VB_m(t_0,t_1)$ - пространство m-мерной функции $y(t)$, ограниченной вариации на отрезке $[t_0,t_1]$ и непрерывных справа на полуинтервале $[t_0,t_1)$.

Вектор-функция $x(t) \in VB_n(t_0,t_1)$, удовлетворяющая при $t \in [t_0,t_1]$ интегральной системе

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t}[A(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau)]d\tau + \int_{t_0}^{t} C(\tau)Du(\tau) \qquad (3)$$

называется слабым решением задачи (1), (2), отвечающая функции $u(t) \in VB_r(t_0,t_1)$, где интеграл понимается в смысле Римана-Стилтьеса.

На множестве слабых решений задачи (1),(2) рассматриваем минимизацию функционала

$$J(u) = \frac{1}{2}\left\{x_u'(t_1)Fx_u(t_1) + \int_{t_0}^{t_1}[x_u'(t)W(t)x_u(t) + u'(t)U(t)u(t)]dt\right\}, \qquad (4)$$

где штрих $(')$ означает транспонированную матрицу (вектор), $x_u(t)$ - слабое решение задачи (1), (2), отвечающая функции $u(t) \in VB_r(t_0,t_1)$; F, $W(t)-(n\times n)$ - матрицы, $U(t)-(r\times r)$ - матрица.

Предположим, что выполняются следующие условия:

1) Все элементы матрицы $A(t), B(t)$ суммируемы на $[t_0,t_1]$ в смысле Лебега. Все элементы $C(t)$ абсолютно непрерывны на $[t_0,t_1]$.

2) F симметричная, неотрицательная, постоянная матрица, $W(t)$ симметричная, неотрицательная и непрерывная на $[t_0,t_1]$ матрица, $U(t)$ симметричная, положительно определённая и непрерывная на $[t_0,t_1]$ матрица.

3) U_∂ является множеством допустимых управлений:

$$U_\partial = \{u(t) \in VB_r(t_0,t_1), |u(t)| \le C,\ Var_{t_0}^{t_1}u(t) \le K\},$$

где $C = const > 0$, $K = const > 0$.

Норма Du на отрезке $[t_0,t_1]$ определяется формулой

$$\|Du\| = \int_{t_0}^{t_1}|Du| = |u(t_0-0) - u(t_0)| + Var_{t_0}^{t_1}u(t).$$

2. Существование слабого решения.

Теорема 1. Для произвольной функции $u(t) \in U_\partial$ существует единственное слабое решение $x(t)$ задачи (1),(2).

Доказательство. Перейдём от задачи (1),(2) к интегральному уравнению (3) и построим последовательные приближения:

$x_0(t) = x^0$,

$$x_{k+1}(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} [A(\tau)x_k(\tau) + B(\tau)u(\tau)]d\tau + \int_{t_0}^{t} C(\tau)Du(\tau),\ k = 0,1,2,\dots\ . \qquad (*)$$

По предположениям 1) и 3) существуют все приближения $x_k(t) \in$ $\in VB_n(t_0, t_1)$, $k = 1,2,3,\dots$.

Из равенства (*), имеем

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \le \int_{t_0}^{t} \|A(\tau)\|\ |x_k(\tau) - x_{k-1}(\tau)|\, d\tau\ . \qquad (5)$$

Положим

$$M = \sup_{t_0 \le t \le t_1} |x_1(t) - x_0(t)|,$$

тогда из (5) по математической индукции, получим

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \le M\, \frac{(\gamma(t))^k}{k!},\ k = 0,1,2,\dots\ , \qquad (6)$$

где $\gamma(t) = \int_{t_0}^{t} \|A(\tau)\| d\tau$.

Правая часть неравенства (6) есть k-й член ряда, равномерно сходящегося на отрезке $[t_0, t_1]$. Следовательно, существует предел

$$\lim_{k\to\infty} x_k(t) = x(t),\ x(t) \in VB_n(t_0, t_1)\ .$$

В (*) возможен предельный переход под знаком интеграла. Переходя к пределу в (*) получаем, что $x(t)$ является решением интегрального уравнения (3). Значит, $x(t)$ является слабым решением задачи (1),(2) при управлении $u(t)$.

Докажем единственность слабого решения. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ слабые решения задачи (1),(2), отвечающие управлению $u(t) \in VB_r(t_0, t_1)$. Положим $z(t) = x(t) - y(t)$. Тогда $z(t)$ является абсолютным непрерывным решением задачи

$$\dot z = A(t)z,\ z(t_0) = 0\ .$$

Отсюда, умножая обе стороны на $z'(t)$, имеем

$$z'(t)\dot z(t) = z'(t)A(t)z(t)\ .$$

Так как

$$\frac{d}{dt}|z(t)|^2 = 2z'(t)\dot z(t),\ |z'(t)A(t)z(t)| \le \|A(t)\|\ |z(t)|^2,$$

то для почти всюду $t \in [t_0, t_1]$:

$$\frac{d}{dt}|z(t)|^2 \le 2\|A(t)\|\,|z(t)|^2 .$$

Отсюда, для почти всюду $t \in [t_0, t_1]$:

$$\frac{d}{dt}\left(|z(t)|^2 e^{-2\gamma(t)}\right) \le 0 .$$

Таким образом, абсолютно непрерывная функция

$$h(t) = |z(t)|^2 e^{-2\gamma(t)}$$

не возрастает на $t \in [t_0, t_1]$ и из $z(t_0) = 0$ следует, что $z(t) = 0$ при $t \in [t_0, t_1]$. Следовательно, $x(t) = y(t), \quad t \in [t_0, t_1]$, т.е. единственность слабого решения доказана.

3. Существование оптимального управления.

Теорема 2. Существует единственное оптимальное управление $u^*(t) \in U_\partial$ в задаче (1),(2),(4).

Доказательство. Пусть последовательность $\{u_m(t)\}$ допустимых управлений минимизирует функционал (4) при условиях (1),(2), где $u_m(t) \in U_\partial$:

$$\lim_{m\to\infty} J(u_m) = \frac{1}{2}\lim_{m\to\infty}\left\{ x_m'(t_1) F x_m(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} [x_m'(t) W(t) x_m(t) + u_m'(t) U(t) u_m(t)] dt \right\} =$$
$$= \inf J(v), \quad \forall v \in U_\partial , \tag{7}$$

где $u_m(t) \in U_\partial$, $x_m(t)$ - слабое решение задачи (1),(2) при управлении $u_m(t) \in U_\partial$, т.е. удовлетворяет интегральному тождеству

$$x_m(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} [A(\tau) x_m(\tau) + B(\tau) u_m(\tau)] d\tau + \int_{t_0}^{t} C(\tau) D u_m(\tau) , \ m = 1,2,... . \tag{8}$$

По второй теореме Хелли из последовательности $\{u_m(t)\}$ выбираем подпоследовательность (снова обозначим её через $u_m(t)$), которая *-слабо сходится к некоторой функции $u^*(t) \in U_\partial$. Обозначим через $x^*(t)$ слабое решение задачи (1),(2) при управлении $u^*(t)$. Покажем, что последовательность решений $\{x_m(t)\}$ сходится в $VB_n(t_0, t_1)$ к функции $x^*(t)$.

Вычитая из (8) интегральное тождество (3), в которых вместо $x(t)$, $u(t)$ подставлены, соответственно, $x^*(t), u^*(t)$, переходя слева и справа к абсолютному значению, имеем

$$|x_m(t) - x^*(t)| \le \int_{t_0}^{t} \|A(\tau)\|\, |x_m(\tau) - x^*(\tau)| d\tau + h_m(t) , \tag{9}$$

где

$$h_m(t)=\left|\int_{t_0}^{t} B(\tau)[u_m(\tau)-u^*(\tau)]\,d\tau+\int_{t_0}^{t} C(\tau)D(u_m(\tau)-u^*(\tau))\right|.$$

Отсюда, применяя лемму Гронуолла, получим:

$$\left|x_m(t)-x^*(t)\right|\le K\,h_m(t),\;\; K=const>0\,. \tag{10}$$

Из неравенства (10), переходя к пределу при $m\to\infty$, получим, что последовательность $\{x_m(t)\}$ сходится к функции $x^*(t)$ на отрезке $[t_0,t_1]$. Так как справедлива оценка

$$Var_{t_0}^{t}(x_m(\tau)-x^*(\tau))=\int_{t_0}^{t}\left|Dx_m(\tau)-Dx^*(\tau)\right|\le$$

$$\le\int_{t_0}^{t}\left\|A(\tau)\right\|\left|x_m(\tau)-x^*(\tau)\right|d\tau+h_m(t),$$

отсюда следует, что

$$\lim_{m\to\infty} Var_{t_0}^{t}x_m(\tau)=Var_{t_0}^{t}x^*(\tau))\,,\; t\in[t_0,t_1]\,.$$

Следовательно, предельная функция $x^*(t)\in VB_n(t_0,t_1)$. Далее из выпуклости множества U_∂ в $VB_r(t_0,t_1)$ и из строгой выпуклости функционала на U_∂ $J(u)$ следует, что она полунепрерывна снизу на U_∂. Тогда функционал $J(u)$ слабо полунепрерывен снизу на U_∂ ([1], стр.52).

Поэтому

$$J(u^*)\le\lim_{m\to\infty}J(u_m)=\frac{1}{2}\left\{x^*(t_1)Fx^*(t_1)+\int_{t_0}^{t_1}[x^{*'}(t)W(t)x^*(t)+\right.$$

$$\left.+u^{*'}(t)U(t)u^*(t)]dt\right\}=\inf J(v),\;\forall v\in U_\partial.$$

Следовательно, $u^*(t)\in VB_r(t_0,t_1)$ является оптимальным управлением.

Единственность оптимального управления следует из строгой выпуклости функционала $J(u)$. Теорема доказана.

4. Необходимое и достаточное условия оптимальности управления.

В дальнейшем в качестве допустимых управлений $u(t)$ будем считать функции пространства $VB_r(t_0,t_1)$.

Теорема 3. Пусть $u^*(t)$ допустимое управление, а $x^*(t)$ - слабое решение задачи (1)-(2) при управлении $u^*(t)$. Тогда соотношения

$$\begin{aligned}&Dx=A(t)x+B(t)p(t)+C(t)Dp(t),\,x(t_0-0)=x^0,\\&p(t)=U^{-1}(t)[B'(t)z+D(C(t)z)]\,,\end{aligned} \tag{11}$$

$$Dz + A'(t)z = W(t)x,\ z(t_1) + Fx(t_1) = 0 \qquad (12)$$

являются необходимым и достаточным условием оптимальности управления $u^*(t)$. А оптимальное управление $u^*(t)$ определяется равенством

$$u^*(t) = U^{-1}(t)[B'(t)z(t) + D(C(t)z(t))], \qquad (13)$$

где предполагается, что $p(t) \in VB_r(t_0, t_1)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $u^*(t)$ оптимальное управление и $x^*(t)$ соответствующее ему слабое решение задачи (1),(2).

Положим

$$u_\varepsilon(t) = u^*(t) + \varepsilon\, h(t), \qquad (14)$$

где $h(t) \in VB_r(t_0, t_1)$.

Если $x_\varepsilon(t)$ - слабое решение задачи (1),(2) при управлении $u_\varepsilon(t)$, то можно написать

$$x_\varepsilon(t) = x^*(t) + \varepsilon\, y(t), \qquad (15)$$

где $y(t)$ является слабым решением задачи

$$Dy = A(t)y + B(t)h(t) + C(t)Dh(t),\ y(t_0) = 0. \qquad (16)$$

Вычислим приращение функционала (4).

$$\Delta J(u^*) = J(u_\varepsilon) - J(u^*) = \frac{1}{2}\left\{ x'_\varepsilon(t_1)Fx_\varepsilon(t_1) + \int_{t_0}^{t_1}[x'_\varepsilon(t)W(t)x_\varepsilon(t) + \right.$$

$$+ u'_\varepsilon(t)U(t)u_\varepsilon(t)]dt - x^*(t_1)Fx^*(t_1) - \int_{t_0}^{t_1}[x^{*'}(t)W(t)x^*(t) +$$

$$\left. + u^{*'}(t)U(t)u^*(t)]dt \right\} + \varepsilon\left\{ \int_{t_0}^{t_1} z'(t)[Dy(t) - A(t)y(t) - B(t)h(t)]dt - \right.$$

$$\left. - \int_{t_0}^{t_1} C(t)Dh(t) \right\} = \varepsilon\, x^{*'}(t_1)Fy(t_1) + \varepsilon\left\{ \int_{t_0}^{t_1}[x^{*'}(t)W(t)y(t) + \right.$$

$$\left. + u^{*'}(t)U(t)h(t)]dt \right\} + \varepsilon\, z'(t_1)y(t_1) - \varepsilon\left\{ \int_{t_0}^{t_1}[(Dz(t) + z(t)A(t))'y(t) + \right.$$

$$\left. + z'(t)h(t)]dt + \int_{t_0}^{t_1} z'(t)C(t)Dh(t) \right\} + \eta(\varepsilon), \qquad (17)$$

где

$$\eta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2}\left\{ y'(t_1)Fy(t_1) + \int_{t_0}^{t_1}[y'(t)W(t)y(t) + h'(t)U(t)h(t)]dt \right\}. \qquad (18)$$

Отсюда потребуем, чтобы $z(t)$ удовлетворяла задаче (12). Тогда приращение функционала имеет вид

$$\Delta J(u^*) = \varepsilon \left\{ \int_{t_0}^{t_1} [u^{*'}(t)U(t) - z'(t)B(t)]h(t)dt + \int_{t_0}^{t_1} z'(t)C(t)Dh(t) \right\} + \eta(\varepsilon). \quad (19)$$

В силу определения слабого решения задачи (16), имеем

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} [A(\tau)y(\tau) + B(\tau)h(\tau)]d\tau + \int_{t_0}^{t} C(\tau)Dh(\tau).$$

Отсюда имеем

$$|y(t)| \le \int_{t_0}^{t} \|A(\tau)\| \, |y(\tau)| d\tau + r(t), \quad (20)$$

где

$$r(t) = \int_{t_0}^{t} \|B(\tau)\| \, |h(\tau)| d\tau + \int_{t_0}^{t} \|C(\tau)\| \, |Dh(\tau)|.$$

Используя лемму Гронуолла, из (20) получим оценку

$$|y(t)| \le Kr(t_1), \; t_0 \le t \le t_1, \; K = \exp \int_{t_0}^{t_1} \|A(t)\| dt. \quad (21)$$

Учитывая полученную оценку в выражении (18), получим что $\eta(\varepsilon) = o(\varepsilon)$.

Поскольку $u^*(t)$ оптимальное управление, в силу равенства (19), при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, имеем

$$\Delta J(u^*) = \varepsilon \left\{ \int_{t_0}^{t_1} [u^{*'}(t)U(t) - z'(t)B(t)]h(t)dt + \right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t_1} z'(t)C(t)Dh(t) \right\} + o(\varepsilon) \ge 0. \quad (22)$$

Отсюда следует, что

$$\int_{t_0}^{t_1} [u^{*'}(t)U(t) - z'(t)B(t)]h(t)dt + \int_{t_0}^{t_1} z'(t)C(t)Dh(t) \ge 0. \quad (23)$$

Используя то, что это неравенство верно для любого $h(t) \in VB_r(t_0, t_1)$, то из (23) получаем, что

$$u'(t)U(t) - z'(t)B(t) = D(z'(t)C(t)), \quad (24)$$

почти всюду на $[t_0, t_1]$.

Отсюда, почти всюду на $[t_0, t_1]$, имеем

$$u^*(t) = U^{-1}(t)[B'(t)z(t) + D(C'(t)z(t))] \equiv p(t). \quad (25)$$

Подставляя соотношение (25) в уравнение (1), получим уравнение (11).

Достаточность. При выполнении соотношения (11),(12) покажем, что функция $u^*(t) = p(t)$ является оптимальным управлением.

Пусть $\overline{u}(t)$ любое управление, а $\overline{x}(t)$ - слабое решение задачи (1),(2) при управлении $\overline{u}(t)$. Положим

$$\overline{u}(t) = u^*(t) + \varepsilon\, h(t),\ \ \overline{x}(t) = x^*(t) + \varepsilon\, y(t)\,,$$

где $y(t)$ - слабое решение задачи (16) при управлении $h(t) \in VB_r(t_0, t_1)$.

Аналогично тому, как получена формула (19), для приращения функционала (4) имеем

$$\Delta J(u^*) = \varepsilon \left\{ \int_{t_0}^{t_1} [u^{*'}(t)U(t) - z'(t)B(t)]h(t)dt + \int_{t_0}^{t_1} z'(t)C(t)Dh(t) \right\} + \eta(\varepsilon)\,, \quad (26)$$

где

$$\eta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ y'(t_1)Fy(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} [y'(t)W(t)y(t) + h'(t)U(t)h(t)]dt \right\}. \quad (27)$$

Учитывая равенство (25) в (26), получим

$$\Delta J(u) = \eta(\varepsilon) \geq 0\,.$$

Следовательно, управление $u^*(t)$, определённое равенством (25), является оптимальным. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400 с.
2. Гасанов К.К., Гусейнова Х.Т. Виброкорректные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка с обобщёнными воздействиями // Дифференц. уравнения, 2005, 41, №4, с.551-562.
3. Грибков А.Н., Артеримова С.В., Куркин И.А., Подхватилик П.А. Метод исследования области существования решения задачи оптимального управления при наличии случайных возмущений // Вестник ТГТУ, Рус., 2012, 18, №2, с.345-349.
4. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972, 576 с.
5. Лоуден Д. Оптимальные траектории для космической навигации. М.: Мир, 1966, 152 с.
6. Орлов О.В. Теория оптимальных систем с обобщёнными управлениями. М.: Наука, 1988, 192 с.
7. Панов В.А. Математические основы теории систем. Методы оптимизации. Учебное пособие. Пермь: ПНИПУ, 2011, 148 с.
8. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985, 223 с.
9. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965, 328 с.
10. Ho Yu-chi. Linear stochastic singular control problems // J. Optimiz. Theory and Appl., 1972, v.9, №1, p.24-31.
11. Zhang Lingling, Yamazaki Norioki, Zhai Chengbo. Optimal control problem of positive solution to second order impulsive differential equation // J. Anal. und. Anwend, 2012, 31, №2, p.237-250.

ÜMUMİLƏŞMİŞ İDARƏLİ XƏTTİ SİSTEMLƏRİN OPTİMAL İDARƏ OLUNMASI

K.Q.HƏSƏNOV, X.T.HÜSEYNOVA

XÜLASƏ

İşdə ümumiləşmiş idarəli xətti sistemlərin optimal idarə olunması öyrənilir. Funksional olaraq kvadratik inteqral götürülür. Əvvəlcə qeyd olunmuş ümumiləşmiş idarə üçün Koşi məsələsinin zəif həllinin varlığı və yeganəliyi isbat olunur. Sonra optimal idarənin varlığı və yeganəliyi haqqında teoremin isbatı verilir. Daha sonra idarənin optimallığı üçün zəruri və kafi şərt alınır.

Açar sözlər: optimal idarəetmə, ümumiləşmiş funksiya, zəif həll, məhdud variasiya, funksional.

THE OPTIMAL CONTROL OF LINEAR SYSTEMS WITH GENERALIZED CONTROLS

K.G.HASANOV, Kh.T.HUSEYNOVA

SUMMARY

In this work the optimal control of linear systems with generalized control is studied. As a functional, quadratic integral is taken. Firstly, the existence and uniqueness of the weak solution of Cauchy's problem for the considered generalized control are proved. Then the proof of the theorem on the existence and uniqueness of the optimal control is given. Later the necessary and sufficient condition for optimality of the control is obtained.

Key words: optimal control, generalized function, weak solution, bounded variation, functional.

Принято в редакцию: 24.01.2013 г.
Подписано к печати: 08.03.2013 г.